Estadística y Procesos Estocásticos
Tema 2: Variables Aleatorias

Grado en Ingeniería en Tecnologías de la Telecomunicación

6. Distribuciones de probabilidad discretas especiales

Distribuciones de probabilidad especiales

En esta sección nos ocuparemos de algunas distribuciones de probabilidad que hemos llamado *"especiales"* por su uso frecuente en las aplicaciones prácticas en el ámbito de las telecomunicaciones:

Distribuciones discretas

- Bernoulli
- Binomial
- De Poisson

Distribuciones continuas

- Exponencial
- Weibull
- Uniforme
- Normal

Distribución de Bernoulli

Distribución de Bernoulli

Jacob Bernoulli (1654-1705)

Esta distribución aparece asociada a fenómenos aleatorios en los que sólo son posibles dos resultados, **éxito** (con probabilidad p) y **fracaso** (con probabilidad 1-p). La variable aleatoria:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{Si ocurre éxito} \\ 0 & \text{Si ocurre fracaso} \end{cases}$$

tiene como distribución de probabilidad:

$$P(X = k) = p^k (1-p)^{1-k}, \quad k = 0, 1$$

o de manera equivalente:

$$P(X = 1) = p \qquad P(X = 0) = 1 - p$$

Esta distribución se denomina **distribución de Bernoulli de parámetro p** y se denota de la forma $X \approx Be(p)$

Distribución de Bernoulli

Ejemplos

1. Se lanza al aire una moneda equilibrada y se define $X = 1$ si sale cara y $X = 0$ si sale cruz. Entonces $X \approx Be(\frac{1}{2})$.

1. Se elige al azar una bola de una urna donde hay 20 bolas blancas y 30 negras; se define $X = 0$ si sale blanca y $X = 1$ si sale negra. Entonces $X \approx Be(\frac{3}{5})$

1. Un router recibe paquetes de datos; cada paquete puede llegar completo (con probabilidad 0.99) o incompleto (con probabilidad 0.01). Si definimos $X = 1$ si el paquete llega completo y $X = 0$ si llega incompleto, entonces $X \approx Be(0.99)$

Distribución de Bernoulli. Si $X \approx Be(p)$:

Esperanza

$$E[X] = p$$

En efecto: $E\left[X\right] = \sum_{k=0}^{1} kP\left(X=k\right) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$

Varianza

$$Var(X) = p(1-p)$$

En efecto:
$Var\left(X\right) = E\left[X^2\right] - \left(E\left[X\right]\right)^2 = \sum_{k=0}^{1} k^2 P\left(X=k\right) - p^2 = 0^2 \cdot (1-p) + 1 \cdot p - p^2 = p\left(1-p\right)$

Distribución Binomial

Distribución Binomial

Es el nombre que recibe la distribución de probabilidad de la variable:

X = *"Número de éxitos en n experimentos* ***independientes*** *de Bernoulli de parámetro p"*

$$P\left(X=k\right)=\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\ldots,n$$

Se dice entonces que X sigue una **distribución binomial de parámetros n y p** y se denota $X \approx B(n,p)$.

Distribución Binomial

Ejemplos

1. Se lanza 4 veces al aire una moneda equilibrada y se considera X= *"Número de caras en los cuatro lanzamientos"*. Entonces $X \approx B(4, \frac{1}{2})$

1. En un router se reciben paquetes de datos de 8 bits de longitud. Cada bit puede ser, independientemente del resto de los bits, correcto con probabilidad p o erróneo con probabilidad $1 - p$. Si X es el número de bits correctos en un paquete, entonces $X \approx B(8, p)$

1. Un 60% de los paquetes de datos que se reciben en un conmutador de red de una empresa van dirigidos hacia el exterior, y el otro 40% van dirigidos a máquinas de la propia red local. En un estudio del tráfico de esta red en el que se eligen 50 paquetes al azar, la variable X=*"Número de paquetes dirigidos al exterior"* sigue una distribución $B(50, 0.6)$

Deducción de la función de probabilidad de la distribución binomial.

En el ejemplo 2 anterior, sea X=*"Número de bits correctos en un paquete de 8 bits"* $\approx B(8,p)$. Calculemos $P(X=3)$

- Llamemos B al suceso *"el bit se recibe bien"* (es correcto) y B^c a su suceso contrario (se recibe mal), siendo $P(B)=p$ y $P(B^c)=1-p$.
- Una de las formas en que se pueden recibir sólo 3 bits correctos es que sean los tres primeros:

$$B\cap B\cap B\cap B^c\cap B^c\cap B^c\cap B^c\cap B^c$$

- Como cada bit es correcto o no independientemente del resto, la probabilidad de que ocurra el suceso anterior es:

$$P(B\cap B\cap B\cap B^c\cap B^c\cap B^c\cap B^c\cap B^c)=$$

$$=P(B)P(B)P(B)P(B^c)P(B^c)P(B^c)P(B^c)P(B^c)=$$

$$=P(B)^3\cdot P(B^c)^5=p^3\cdot(1-p)^5$$

Deducción de la función de probabilidad de la distribución binomial.

- El número de formas en que pueden recibirse 3 bits correctos entre 8 coincide con el número de formas en que podemos elegir 3 posiciones entre 8, para colocar en ellas las B:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!}$$

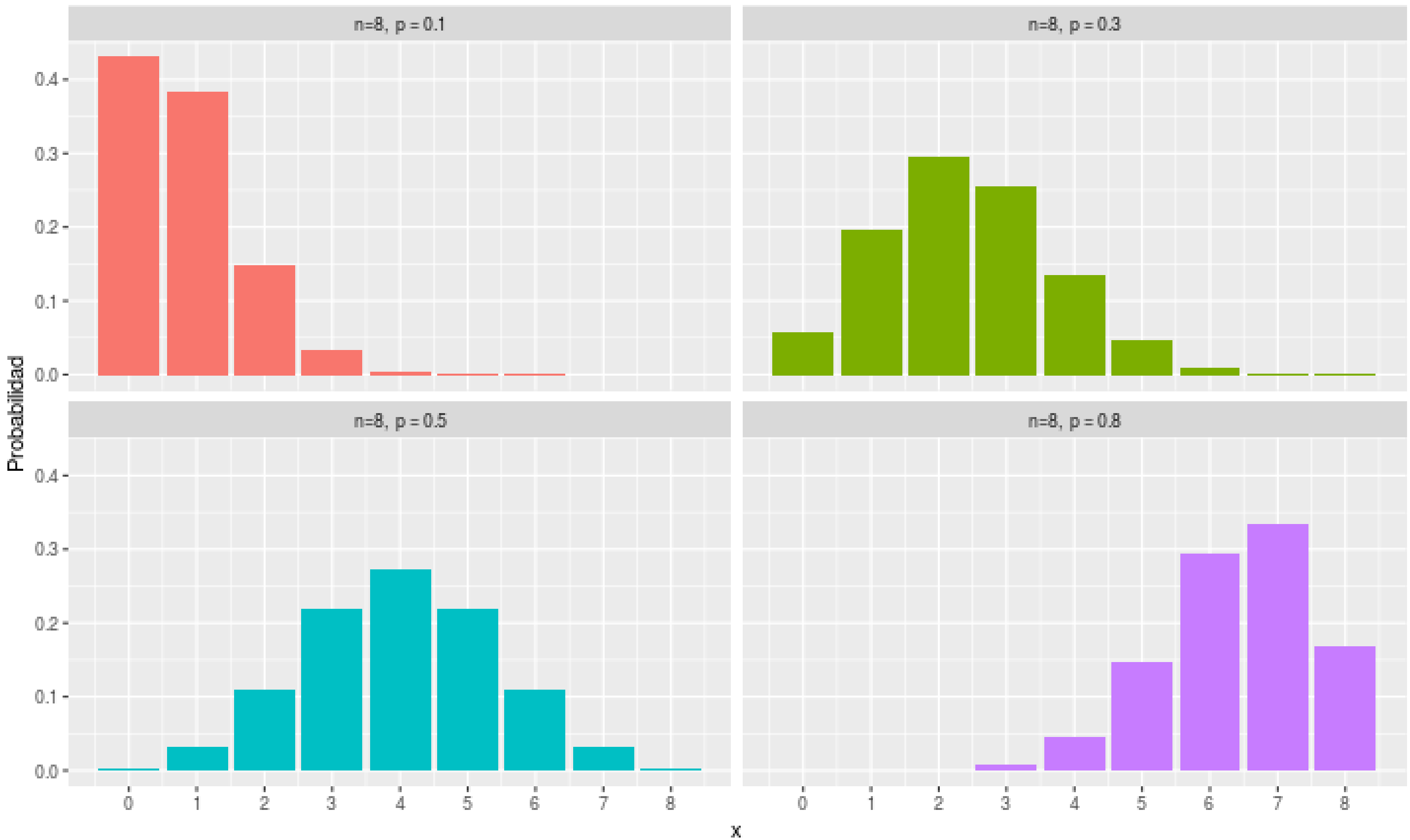
- La probabilidad total de recibir 3 bits correctos entre 8 será la suma de las probabilidades de cada una de estas $\binom{8}{3}$ formas. Como cada una de ellas tiene la misma probabilidad $p^3(1-p)^5$, la probabilidad total será:

$$P(X=3) = \binom{8}{3} p^3 (1-p)^5$$

- En general, si $X \approx B(n, p)$:

$$P\left(X=k\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \;\; k = 0, 1, \ldots$$

Representación gráfica de la distribución binomial para n=8 y varios valores de p



Esperanza de la distribución binomial.

$$E[X] = np$$

Demostración:

$$E\left[X\right] = \sum_{k=0}^{n} kP\left(X=k\right) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}p^k(1-p)^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\left(n-k\right)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k} =$$

$$\underset{(1)}{=} np\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!\left(n-k-1\right)!}p^k(1-p)^{n-k-1} \underset{(2)}{=} np[p+(1-p)]^{n-1} = np$$

(1) Hemos hecho el cambio $k-1 \ \rightarrow \ k$

(2) Hemos aplicado la fórmula del binomio de Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^n b^{n-k}$

Varianza de la distribución binomial.

$$Var(X) = np(1-p)$$

Demostración:

La veremos más adelante utilizando el concepto de *función característica*, que simplifica notablemente el cálculo.

Distribución de Poisson

Distribución de Poisson

Siméon D. Poisson (1781–1840)

Aparece asociada a la variable aleatoria consistente en **contar** el número de ocurrencias de cierto proceso que se caracterizan por estar distribuidas:

- independientemente unas de otras
- de modo completamente aleatorio
- con tasa (densidad) constante
- en un medio continuo.

Distribución de Poisson

Ejemplos:

- El número de llamadas que llegan a una centralita telefónica durante un intervalo de tiempo.
- El número de paquetes de datos que llegan a un conmutador durante un intervalo de tiempo.
- El número de partículas emitidas por un compuesto radiactivo durante un cierto periodo.
- El número de estrellas visibles en una porción rectangular del firmamento.
- El número de accidentes de tráfico que ocurren en una región durante un periodo determinado.

Distribución de Poisson

Sean:

- X_t = *"Número de eventos que ocurren en un periodo de duración t."*
- λ = *tasa media de ocurrencia por unidad de tiempo* de los eventos de interés (número medio de eventos por unidad de tiempo).

X_t sigue una **distribución de Poisson** de parámetro λ, y lo denotaremos $X_t \approx P(\lambda)$, si su función de probabilidad es de la forma:

$$P(X_t = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Distribución de Poisson. Ejemplo:

Supongamos que el número de paquetes que llegan a un router sigue una distribución de Poisson de parámetro λ= 3 paquetes por μseg.

- La probabilidad de que en 1 μseg lleguen 2 paquetes es:

$$P(X_1 = 2) = e^{-3}\frac{3^2}{2!} = 0.224$$

- La probabilidad de que en 1 μseg lleguen 3 o más paquetes es:

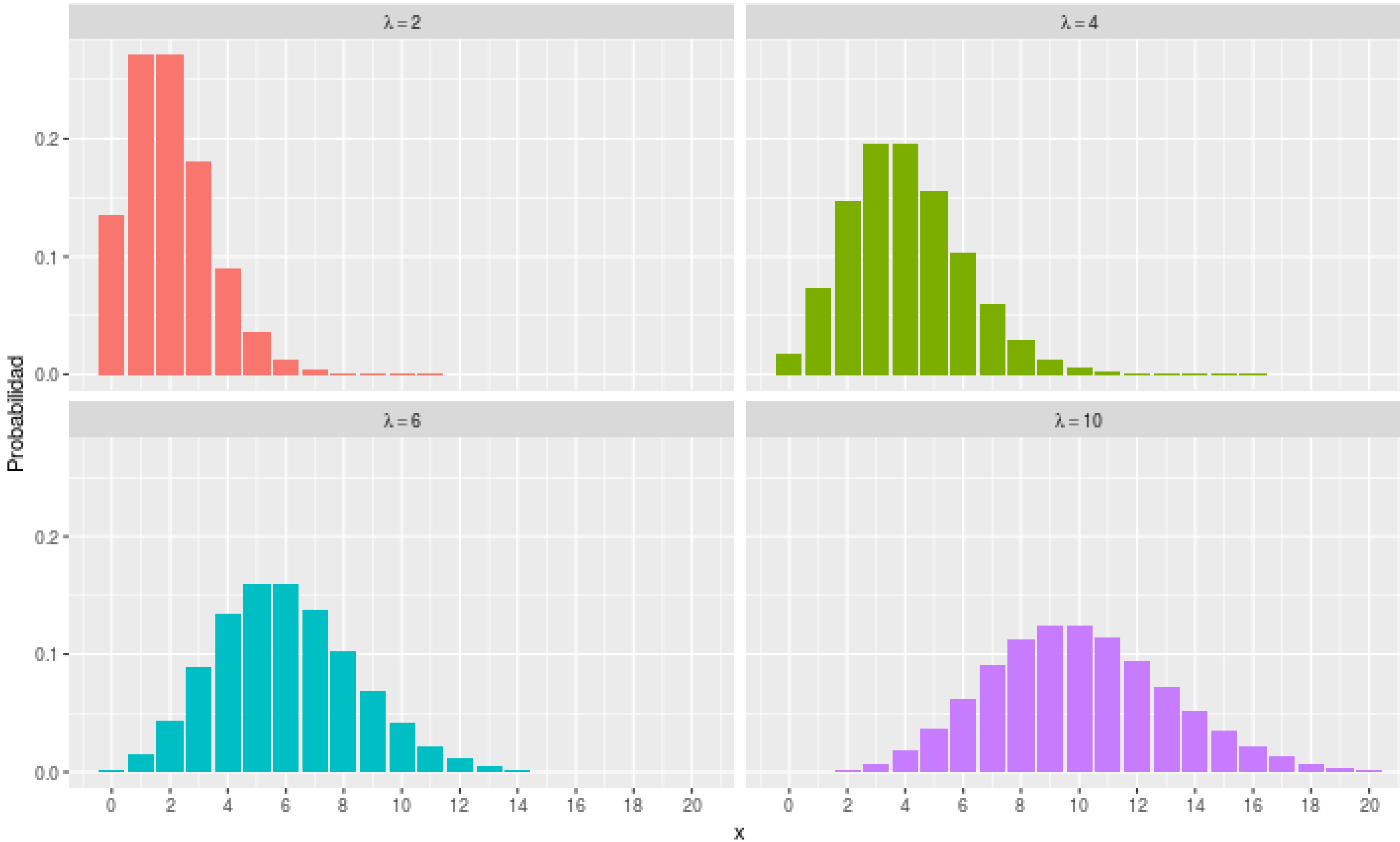
$$P\left(X_1 \geq 3\right) = 1 - P\left(X_1 < 3\right) = 1 - \left[P\left(X_1 = 0\right) + P\left(X_1 = 1\right) + P\left(X_1 = 2\right)\right] =$$

$$= 1 - \left(e^{-3}\frac{3^0}{0!} + e^{-3}\frac{3^1}{1!} + e^{-3}\frac{3^2}{2!}\right) = 0.58$$

- La probabilidad de que en 2 μseg lleguen 5 paquetes es:

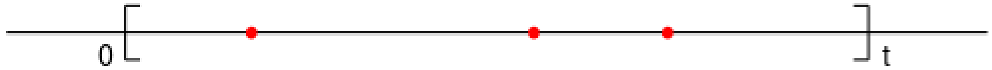
$$P\left(X_2 = 5\right) = e^{-3\cdot 2}\frac{(3\cdot 2)^5}{5!} = 0.1606$$

Representación gráfica de la distribución de Poisson para varios valores de λ

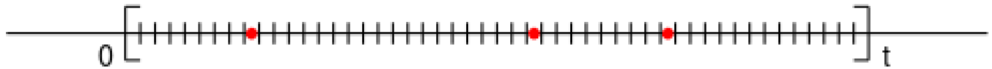


Deducción de la función de probabilidad de la distribución de Poisson

- Sea X una variable aleatoria con distribución de Poisson que cuenta el número de eventos que ocurren al azar e independientemente en un intervalo $[0, t]$ siendo λt el número esperado de eventos en ese intervalo.



- Dividimos el intervalo $[0, t]$ en n partes iguales; para un n lo suficientemente grande ($n \to \infty$), las partes en que lo hemos dividido llegan a hacerse tan pequeñas que en cada una de ellas puede ocurrir como máximo un evento, o ninguno.



- Como el número esperado de eventos en $[0, t]$ es λt, la probabilidad de que ocurra un evento en una de las n partes en que hemos dividido el intervalo puede aproximarse por $p = \frac{\lambda t}{n}$

Deducción de la función de probabilidad de la distribución de Poisson

- Dado que los distintos eventos ocurren de forma independiente, la probabilidad de que ocurran k eventos en las n partes en que hemos dividido el intervalo $[0, t]$ puede aproximarse por una binomial $B(n, p)$, y entonces:

$$P(X = k) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{(\lambda t)^k}{k!} \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{-k} =$$

$$\frac{(\lambda t)^k}{k!} 1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot e^{-\lambda t} \cdot 1 = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Esperanza de la distribución de Poisson

$$E\left[X\right] = \lambda t$$

Demostración:

$$E\left[X\right] = \sum_{k=0}^{\infty} kP\left(X = k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-\lambda t}\frac{\left(\lambda t\right)^{k}}{k!} = e^{-\lambda t}\lambda t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\lambda t\right)^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$e^{-\lambda t}\lambda t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda t\right)^{k}}{k!} = e^{-\lambda t}\lambda t e^{\lambda t} = \lambda t$$

Varianza de la distribución de Poisson

$$Var\,(X) = \lambda t$$

Demostración:

La veremos más adelante utilizando el concepto de *función característica*, que simplifica notablemente el cálculo.